Oral Blanc Centrale Math II - Sujet 1

On utilisera la fiche de tracé et de polynome

Soit (F_n) la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.
On note β la racine négative du polynôme $X^2 - X - 1$.
On défini $f : x \in]-1,1[\mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k}$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ su $]-1,1[$
2. Ecrire la fonction `f(n,x)` qui renvoie $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{1-x^k}$
3. Ecrire une fonction `Tracef(n)` qui trace la fonction $f(n,\cdot)$ sur $]-1,1[$
4. Ecrire une fonction `SommeFibo(n)` qui renvoie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_{2k}}$
5. Conjecturer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{F_{2k}} + \sqrt{5}(f(\beta^2) - f(\beta^4))$.
6. Exprimer F_n en fonction de β et prouver la conjecture.
7. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $f(e^{-y}) \sim -\frac{\ln y}{y}$ en 0.