Oral Blanc Centrale Math II - Sujet 2

On utilisera la fiche de matrice et random

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients strictement positifs.

1. Faire un programme qui prend en argument un entier et renvoie une matrice de avec des coefficients tirés aléatoirement.

2. Déterminer à l'aide de `Python` les valeurs propres de différentes matrices de $\mathcal{E}_n$. Conjecturer les réponses à ces questions grâce à l'experience.

   (a) Une matrice de $\mathcal{E}_n$ peut-elle avoir une valeur propre strictement négative ?

   (b) Une matrice de $\mathcal{E}_n$ peut-elle avoir toutes les valeurs propres strictement négatives ?

3. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de $A \in \mathcal{E}_n$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associée à l'ordre $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

   (a) Implémentez une fonction qui calcule X_n pour une matrice de $\mathcal{E}_n$.

   (b) Que peut-on conjecturer sur les coefficients de X_n ?

   (c) Montrer que : $\forall Y \in \mathbb{R}^n$, ${}^tY\, A\, Y \leq \lambda_n ||Y||^2$

   (d) Démontrer la conjecture (on considèrera le vecteur Z_n dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X_n).

4. On note $A_n = \begin{pmatrix} A & aX_n \\ a\,{}^tX_n & 0 \end{pmatrix}$ pour tout a réel .

   (a) Ecrire une fonction qui génère A_a à partir de A et a.

   (b) On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres de A . En déduire celles de A_a pour certaines valeurs de a, vérifiez par le calcul.

   (c) Donner les valeurs propres de A_a dans le cas général .