Oral Blanc Centrale Math II - Sujet 3

On utilisera la fiche de matrice et random et polynomes

On considère une famille $(a_0, \ldots, a_d)$ de réels strictement positifs telle que $\sum_{k=0}^{d} a_k = 1$. On note $m = \sum_{k=0}^{d} k a_k$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, et :

$$\in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} a_k \, u_{n-k}$$

On définit également la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n-d} \end{pmatrix}$$

avec la convention si $u_{n-k} = 0$ si $k > n$.

1. Déterminer la matrice M telle que : $\forall n \in, U_{n+1} = MU_n$
2. `Python` Ecrire une fonction qui génère une liste aléatoire de `d` réels dont la somme vaut 1.
3. `Python`. Écrire une fonction qui prend en entrée une liste L, donnant la famille $(a_0, \ldots, a_d)$, et un entier n , et qui renvoie u_n.
4. Tester votre fonction avec une liste aléatoire, et observer la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N})}$. Conjecturer une relation entre la limite de cette suite et $\frac{1}{1+m}$.
5. On note $A = X^{d+1} - \sum_{k=0}^{d} a_k \, X^{d-k}$. Remarquer sur des listes aléatoires que 1 est racine simple de A puis montrer le. Vérifier puis montrer que toute autre racine de A est dans $]-1, 1[$.
6. Déterminer $B = \sum_{k=0}^{d} b_k \, X^k$ tel que $A = (X-1)\, B$. A l'aide d'assertions et d'exemples aléatoires vérifiez votre résultat en Python.
7. Calculer le polynome caractéristique de M sur des exemples et comparez le à A.
8. Montrer que A est le polynôme caractéristique de M. En déduire une condition sur B pour que M soit diagonalisable.