

Oral Blanc Centrale Math II - Sujet 4

On utilisera la fiche de matrice et random

Dire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est stochastique signifie que ses coefficients sont tous positifs et que sur chaque ligne, la somme des coefficients vaut 1. On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose stochastique.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A et de tA .
2. Soit λ une valeur propre de A . Montrer que $|\lambda| \leq 1$.
3. Etant donné $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

4. Ecrire en `Python` une fonction d'en-tête `ligne(n)` qui renvoie un n -uplet de nombres aléatoires positifs dont la somme vaut 1.
5. Ecrire en `Python` une fonction d'en-tête `ST(n)` qui renvoie une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier sur des exemples que 1 est bien valeur propre de ces matrices.
6. On suppose maintenant que les coefficients de A sont strictement positifs. Montrer que 1 est la seule valeur propre de A de module 1.