Oral Blanc Centrale Math II - Sujet 6

Pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M_u est combinaison linéaire de trois matrices indépendantes de u et dont l'une est le carré de l'autre.
2. Écrire un programme qui prend en entrée u et renvoie M_u.
3. Calculer $M_{7,-14,1} \times M_{1,2,3}$ et $M_{1,2,3} \times M_{7,-14,1}$.
4. Montrer que M_u est semblable à $\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \frac{1}{2}(b+c) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) & a - \frac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}$.
5. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_u soit diagonalisable.
6. On pose $P_m = X^3 - X^2 + m$, avec $m \in \{-0,1; 0; 0,1; 0,2\}$ Tracer les courbes des différents polynômes P_m sur l'intervalle [-1, $\frac{3}{2}$].
7. Trouver une C.N.S. sur m pour que P_m admette trois racines réelles.