

Oral Blanc Centrale Math II - Sujet 7

1. (a) Écrire une fonction qui pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 crée la liste des entiers de $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ dans l'ordre puis qui en choisit un au hasard dans cette liste en suivant une loi uniforme (on pourra utiliser la fonction `randint`) et qui renvoie la liste à laquelle on aura enlevé l'élément choisi.
(b) Écrire une fonction qui pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 crée la liste des entiers de $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ dans l'ordre puis qui en choisit un au hasard en suivant une loi uniforme pour le retirer de la liste et l'ajouter à une nouvelle liste tant que la première liste n'est pas vide et jusqu'à ce que la nouvelle liste ait atteint une longueur n . Que fait cette fonction ? A quoi cela revient-il ?
2. On note $\mathbb{B}_n$ l'ensemble des bijections de $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ sur lui même
 - (a) Quel est le cardinal de $\mathbb{B}_n$?
 - (b) Écrire une fonction qui pour f bijection de $\mathbb{B}_n$ renvoie le nombre de points fixes de f
 - (c) On appelle S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de points fixes d'une bijection de $\mathbb{B}_n$. Faire une simulation de $N = 500$ tirages avec remise de bijections (utiliser la fonction du 1)b)) avec $n = 10$.
 - Calculer pour ces tirages la suite $(S_n)_{k, 1 \leq k \leq n}$
 - Calculer la moyenne des valeurs de la suite $(S_n)_{k, 1 \leq k \leq n}$
 - Faire de même avec $n = 1000$ et $N = 1000$En déduire une conjecture sur l'espérance de S_n
 - (d) Démontrer la conjecture par le calcul
3. Calculer la variance de S_n
4. On note $p_{n,k} = \mathbb{P}_n(S_n = k)$. Que valent $p_{n,n}$ et $p_{n,n-1}$?
5. Simuler 10000 tirages de $S(2000)$ et estimer numériquement $p_{2000,k}$ pour tout $k \in \{0, \dots, 1999\}$.
6. Calculer $\frac{1}{p_{2000,k} k!}$ pour $k \in \{0, \dots, 5\}$. Conjecturer la valeur de $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n,k}$.
7. Montrer que $p_{n,k} = \frac{1}{k!} p_{n-k,0}$.
8. Montrer que $(n+2)p_{n+2,0} = (n+1)p_{n+1,0} + p_{n,0}$, pour tout $n > 1$.
9. En déduire que $p_{n,0} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$
10. Prouver la conjecture de la question 6. Reconnaître la loi vers laquelle converge $p_{n,k}$.