Introduction aux commandes

I Calcul Matriciel

Feuille Calcul Matriciel

Attention. Les tableaux numpy sont initialisés avec un type, entier ou flottant. Un tableau initialisé avec un `1` ne pourra plus contenir des nombres flottants. Il faut initialiser le tableau avec `1.` ou `1.0` pour obtenir un tableau avec nombres flottants.

1. Créer une matrice Z, 10×12 pleine de 0.
2. Créer le vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ avec 42 éléments.
3. Créer la matrice identité , I, de $\mathbb{R}^{12}$.
4. Créer la matrice diagonale, D, de taille 21 avec 2^{i-1} comme $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal.
5. Créer une matrice, A, 3×4 avec $m_{i,j} = i^j$.
6. Créer une matrice, B, 3×3 avec $m_{i,j} = i + j$.
7. Transformez V en vecteur ligne.
8. Écrire une fonction qui prend en entrée une matrice et vérifie si elle est carrée.
9. Définir U comme le vecteur ligne correspondant à la ligne 1 de A.
10. Définir V comme le vecteur colonne correspondant à la colonne 12 de D.
11. Extraire $D_1, D_2, \dots, D_7$ les 7 matrices par block 3×3 diagonales de D :

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_7 \end{bmatrix}$$

12. Reconstruire D par concaténation de $D_1, D_2, \dots, D_7$ avec des matrices nulles de la bonne forme.
13. Créer une copie E de D
14. Modifiez les coefficient $m_{i,j}, j < i$ de E pour les mettre à $\frac{1}{2}$
15. Créer $F = \frac{1}{4} E D E^t + 3 D + I_{21}$
16. Écrire une fonction `V` qui prend en entrée une liste de flottant $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ et qui renvoie la matrice de Vandermonde associée à ces entiers.
17. Calculer la trace de `V([1,2,3])`
18. Calculer le determinant de `V([2,6,3,7])`
19. Calculer le rang de `V([2,2,3,3])`
20. Calculer le determinant de `V([2,2,3,3])`
21. Calculer le rang de `V([2,2,3,3])`
22. Calculer la trace de `V([1,2,3,4])`
23. Calculer l'inverse de `V([1,2,3,4])`
24. Calculer l'inverse de D
25. Calculer E^{12}
26. Résoudre le système `V([12,21,42,144])x = [12,12,12,12]`
27. Calculer le polynôme caractéristique de `V([12,8,9])`

28. Soit $W = V([1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{20}}])$. Calculez les valeurs propres de $G = W\,D\,W^{-1}$.
29. Démontrer par le calcul que G est diagonalisable.
30. Soit $u = (1, -1, 2)$ et $v = (12, 8, -2)$. Vérifiez que u et v sont orthogonaux.
31. Construire une base orthonormée directe, B, en partant de la famille orthogonale (u, v).
32. Écrire la matrice dans la base B, de l'endomorphisme canoniquement associé à B.

II Analyse Numérique 1/2

Feuille Analyse Numérique, 3 premières parties

1. Calculer le module, la partie réelle et la partie imaginaire de $z = (2 + i)e^{3+5i}$.
2. Calculer $\lfloor \log_2(e^{-\pi}) * \text{sh}(\tan(\frac{e}{2})) + \cos(\text{Arcsin}(\frac{1}{\sqrt{2}})) \rfloor$
3. Résoudre $\sin(x) = \frac{2}{\pi}$ en partant de 0.5 puis en partant de 1.
4. Résoudre

$$\begin{cases} cos(x) + sin(y) & = 0 \\ sin(x)cos(y) & = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

III Polynomes

Feuille Polynome

1. Créer le polynôme $W_n = (X^2 - 1)^{12}$.
   (a) Quel est le degré de W_n
   (b) Son coefficient dominant
   (c) la liste de ses coefficients
   (d) Calculez $\frac{1}{2^{12}\,12!} W_n^{(12)}$
   (e) Calculez les racines de $W_n^{(12)}$
2. Ecrire son forme polynomiale le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 5.
3. En déduire le développement limité de $\ln(1 - x)$ à l'ordre 6 par intégration.
4. Calculer le polynôme caractéristique de Q égal à `V([12,8,9])`
5. Quel est le quotient de $W_n^{(12)}$ par Q ? le reste ?

IV Méthode de Horner

On remarque que

$$a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0 = ((\dots(a_n x + a_{n-1}) * x + a_{n-2}) * x + a_{n-3}) \dots) * x + a_0)$$

Comparez le nombre de multiplications de chaque cotés de l'égalité. En déduire une fonction efficace d'évaluation d'un polynome en x_0.

V Fractale de Newton

Etant donné un polynôme, on peut appliquer la méthode de newton sur $\mathbb{C}$ en partant d'un complexe quelconque pour trouver une racine du polynome. En numérotant les racine du polynôme de 1 à n, nombre de racine, on peut associer à chaque point du plan complexe un numéro : celui de la racine vers laquelle converge la méthode de newton. Si on associe à chaque numéro une couleur différente on peut générer une image dans le plan.

1. Ecrire une fonction qui prend en entrée un polynome, la liste de ses racines, un complexe de départ, un flottant ϵ et qui renvoi l'indice de la racine vers laquelle converge la méthode de Newton avec comme critère d'arrêt $x_{k+1} - x_k < \epsilon$ (ou -1 si la dérivée s'annule ou si la méthode de Newton ne converge pas en 100 itérations).
2. Utiliser cette fonction pour générer une image 500×500 avec une échelle $\frac{4}{500}$ de la fractale associée au polynôme $X^4 + X^2 - 1$. Les 4 racines complexes seront associées à 4 couleurs de votre choix. Le noir est reservé pour les points ne convergeant pas. Vous utiliserez des matrices numpy et le module PIL pour générer l'image.